LỜI GIẢI ĐỀ THI MYTS 2019 – VÒNG 1

Môn: Toán 6

Ngày thi: 24/03/2019

Thời gian làm bài: 120 phút

"Trên bước đường thành công không có dấu chân của kẻ lười biếng."

Bài 1. Cho dãy số cách đều $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K$. Biết rằng tổng của hai số E và F bằng 28, hỏi tổng của tất cả các số trong dãy số đó là bao nhiêu?

Lời giải. Đặt $d = B - A = C - B = D - C = E - D = F - E = G - F = H - G = I - H = K - I$. Khi đó, ta có $E = A + 4d$, $F = A + 5d$ và $K = A + 9d$. Vì $E + F = 28$ nên $2A + 9d = 28$. Suy ra

$$A + B + C + D + E + F + G + H + I + K = \frac{10(A + K)}{2} = \frac{10(2A + 9d)}{2} = \boxed{140}.$$ □

Bài 2. Hỏi, có bao nhiêu hình chữ nhật có số đo (theo đơn vị mét) của chiều dài và chiều rộng là các số nguyên dương, đồng thời có diện tích là 48 mét vuông?

Lời giải. Ta thấy có 5 cách biểu diễn 48 thành tích của hai số nguyên dương là

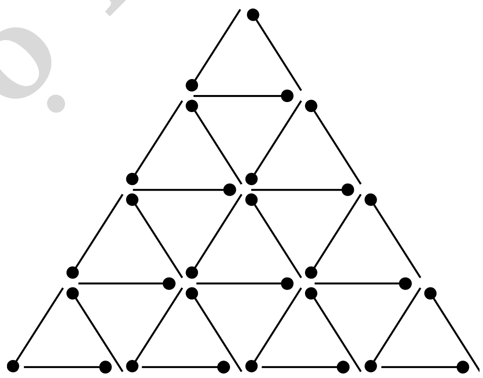
$$48 = 1 \cdot 48 = 2 \cdot 24 = 3 \cdot 16 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8.$$

Vì vậy, số hình chữ nhật thỏa mãn yêu cầu là $\frac{10}{2} = \boxed{5}$. □

Bài 3. Cho số $N = 4 \times 4 \times \cdots \times 4 \times 125 \times 125 \times \cdots \times 125$ (có 15 thừa số 4 và 7 thừa số 125). Hỏi, trong biểu diễn thập phân của N có bao nhiêu chữ số 0 nằm liên tiếp ở cuối?

Lời giải. Ta có $N = 4^{15} \cdot 125^{7} = 2^{30} \cdot 5^{21} = 2^{9} \cdot 10^{21}$. Do đó, trong biểu diễn thập phân của số N có $\boxed{21}$ chữ số 0 ở tận cùng. □

Bài 4. Trong hình vẽ dưới đây, có bao nhiêu que diêm?

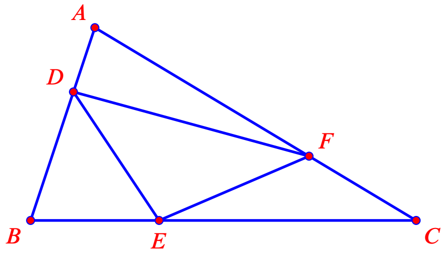


Lời giải. Số que diêm gấp ba lần số tam giác "đứng" cạnh 1 (tương ứng với độ dài một que diêm) có trong hình. Do đó, số que diêm bằng $3(1 + 2 + 3 + 4) = \boxed{30}$. □

Bài 5. Một quán ăn có hai loại bàn ăn: bàn hình chữ nhật ngồi được 8 người, bàn hình tròn ngồi được 5 người. Hỏi, cần dùng bao nhiêu bàn ăn để phục vụ đủ 36 khách mà không còn thừa chỗ nào?

Lời giải. Giả sử có x bàn hình chữ nhật và y bàn hình tròn. Khi đó, tổng số khách được phục vụ là $8x + 5y$. Theo đề bài, ta có $8x + 5y = 36$. Suy ra y chia hết cho 4 và $y \leqslant \frac{36}{5}$, tức $y \in \{0, 4\}$. Thử trực tiếp, ta được $y = 4$ và $x = 2$. Vậy, tổng số bàn ăn cần dùng là $4 + 2 = \boxed{6}$. □

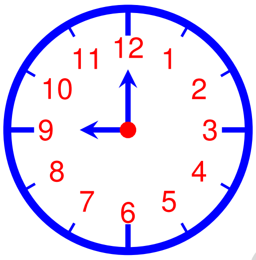
Bài 6. Trong hình vẽ dưới đây, các điểm D, E, F tương ứng chia các đoạn thẳng AB, BC, CA theo tỉ lệ $1 \div 2$. Tính tỉ số diện tích $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}$.



Lời giải. Từ giả thiết, ta có $\frac{S_{ADF}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ADF}}{S_{ABF}} \cdot \frac{S_{ABF}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AF}{AC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$. Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $\frac{S_{BDE}}{S_{ABC}} = \frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \frac{2}{9}$. Do đó

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC} - S_{ADF} - S_{BDE} - S_{CEF}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{S_{ADF}}{S_{ABC}} - \frac{S_{BDE}}{S_{ABC}} - \frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$ □

Bài 7. Một đồng hồ kim đang hoạt động tốt và chỉ giờ rất chính xác. Hỏi, trong một ngày, từ 9 giờ sáng tới 9 giờ tối, có bao nhiêu lần kim giờ và kim phút cùng nằm trên một đường thẳng?



Lời giải. Mỗi giờ, kim phút sẽ quay một vòng tròn, còn kim giờ chỉ duy chuyển từ vạch chỉ giờ này sang vạch chỉ giờ tiếp theo. Do đó, mỗi giờ, kim phút và kim giờ sẽ cùng nằm trên đường thẳng hai lần. Tuy nhiên, ta cũng cần chú ý thêm rằng

- Ở mốc từ 11 giờ sang 12 giờ, kim phút và kim giờ nằm trên đường thẳng hai lần, trong đó có một lần kim phút và kim giờ cùng chỉ vạch 12.
- Ở mốc từ 12 giờ sang 1 giờ, kim phút và kim giờ nằm trên đường thẳng hai lần, trong đó có một lần kim phút và kim giờ cùng chỉ vạch 12.
- Ở mốc từ 5 giờ sang 6 giờ, kim phút và kim giờ nằm trên đường thẳng hai lần, trong đó có một lần kim phút chỉ vạch 12 và kim giờ chỉ vạch 6.
- Ở mốc từ 6 giờ sang 7 giờ, kim phút và kim giờ nằm trên đường thẳng hai lần, trong đó có một lần kim phút chỉ vạch 12 và kim giờ chỉ vạch 6.

Như vậy, ta cần bỏ bớt đi hai lần lặp lại, và như thế, tổng số lần kim giờ và kim phút cùng nằm trên một đường thẳng là $12 \cdot 2 - 2 = \boxed{22}$. □

Bài 8. Trong một lớp học, có 20 bạn học khá Toán, 22 bạn học khá Văn. Biết rằng, có 8 bạn học khá cả Toán lẫn Văn, và 5 bạn không khá môn nào trong hai môn đó. Hỏi, lớp học có bao nhiêu bạn?

Lời giải. Số học sinh học khá một trong hai môn Toán hoặc Văn của lớp là $20 + 22 - 8 = 34$. Do đó, tổng số học sinh của lớp là $34 + 5 = \boxed{39}$. □

Bài 9. Tính giá trị của biểu thức

$$S = \frac{4}{1 \times 3} + \frac{16}{3 \times 5} + \frac{36}{5 \times 7} + \cdots + \frac{2500}{49 \times 51}.$$

Lời giải. Mỗi số hạng trong tổng S có dạng

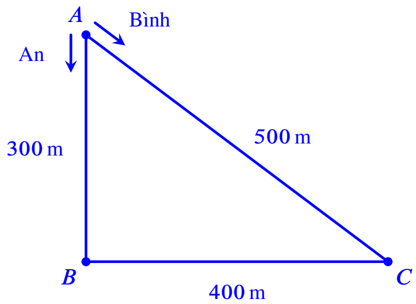
$$\frac{n^2}{(n-1)(n+1)} = \frac{n^2 - 1 + 1}{(n-1)(n+1)} = 1 + \frac{1}{(n-1)(n+1)} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Từ đây, ta suy ra

$$S=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{49}-\frac{1}{51}\right)=25+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{51}\right)=\frac{1300}{51}.$$

Vậy $S=\boxed{\frac{1300}{51}}$. □

Bài 10. Có một khu vườn hình tam giác như ở hình vẽ bên dưới. Hai bạn An, Bình cùng xuất phát từ A và đi vòng quanh khu vườn. An đi ngược chiều kim đồng hồ, còn Bình đi theo chiều kim đồng hồ. Biết rằng An đi nhanh gấp đôi Bình. Gọi D là vị trí mà An và Bình gặp lại nhau lần thứ hai (không tính lần gặp nhau khi xuất phát). Tính độ dài đoạn CD.



Lời giải. Chu vi khu vườn là $300+400+500=1200$ (m). Vì vận tốc của An gấp đôi vận tốc của Bình nên khi hai người gặp nhau lần thứ hai, An đã đi được $1200\cdot\frac{2}{2+1}=800$ (m). Vì $AB+BC=300+400=700<800$ nên điểm gặp nhau D của hai người nằm trên đoạn AC và $CD=800-700=\boxed{100\text{ (m)}}$. □

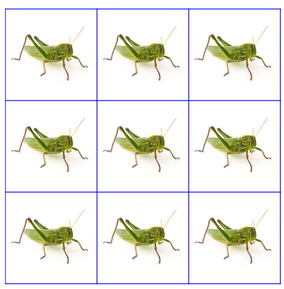
Bài 11. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho n vừa là tổng của 5 số nguyên dương liên tiếp, vừa là tổng của 7 số nguyên dương liên tiếp.

Lời giải. Từ giả thiết, ta thấy tồn tại a và b nguyên dương sao cho

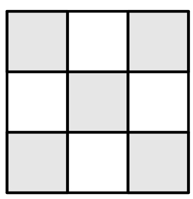
$$n=a+(a+1)+\cdots+(a+4)=b+(b+1)+\cdots+(b+6),$$

hay $n=5a+10=7b+21$. Suy ra n chia hết cho 5 và 7, tức n chia hết cho $[5,\ 7]=35$. Và vì thế $n\geqslant 35$. Mặt khác, ta lại có $35=5+6+7+8+9=2+3+4+5+6+7+8$. Do đó, số n nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài là $\boxed{35}$. □

Bài 12. Ban đầu trong mỗi ô vuông của bảng 3×3 có một con cào cào. Sau đó, vào cùng một lúc, tất cả các con cào cào đều nhảy sang ô vuông bên cạnh. Nhiều con cào cào có thể nhảy vào cùng một ô vuông. Hỏi, sau khi nhảy, trong bảng có thể có nhiều nhất bao nhiêu ô vuông trống? (*Hai ô vuông được gọi là cạnh nhau nếu chúng có cạnh chung.*)



Lời giải. Tô màu các ô của bảng như hình vẽ bên dưới.



Mỗi con cào cào ở ô trắng chỉ có thể nhảy sang ô đen và mỗi con cào ở ô đen chỉ có thể nhảy sang ô trắng. Ta thấy

- Hai con cào cào ở góc trái trên và góc phải dưới không thể cùng nhảy vào một ô nên sau khi các con cào cào cùng nhảy thì phải có ít nhất hai ô trắng bị "chiếm chỗ".
- Sau khi các con cào cào cùng nhảy thì có ít nhất một ô đen bị "chiếm chỗ".

Do đó, số ô trống còn lại không quá $2 + 4 = 6$. Mặt khác, khi tất cả các con cào cào ở các ô trắng nhảy vào ô đen trung tâm, ba con cào cào trong các ô đen ở hai hàng trên cùng nhảy vào ô trắng trên cùng và hai con cào cào trong các ô đen ở hàng dưới cùng nhảy vào ô trắng dưới cùng thì số ô trống còn lại đúng bằng 6. Vậy, sau khi các con cào cào cùng nhảy, trong bảng còn lại nhiều nhất $\boxed{6}$ ô trống. □

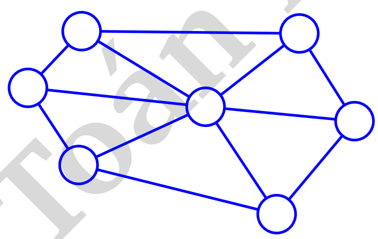
Bài 13. Có hai chiếc máy được khởi động cùng một lúc. Máy thứ nhất cứ chạy 3 giờ lại nghỉ 1 giờ rồi mới chạy tiếp. Máy thứ hai cứ chạy 4 giờ lại nghỉ 1 giờ rồi mới chạy tiếp. Hỏi, trong 100 giờ tính từ khi hai máy được khởi động lần đầu, có bao nhiêu giờ mà cả hai máy cùng nghỉ?

Lời giải. Hai máy sau mỗi lần cùng nghỉ thì cũng sẽ chạy tiếp cùng lúc ngay sau đó. Khoảng thời gian giữa hai lần khởi động liên tiếp của máy thứ nhất là 4 giờ, khoảng thời gian giữa hai lần khởi động liên tiếp của máy thứ hai là 5 giờ. Do đó, hai máy sẽ cùng khởi động sau mỗi $[4,\ 5] = 20$ giờ. Từ đây, ta suy ra, trong 100 giờ tính từ lúc hai máy được khởi động lần đầu, tổng số giờ mà cả hai máy cùng nghỉ là $\frac{100}{20} \cdot 1 = \boxed{5}$ giờ. □

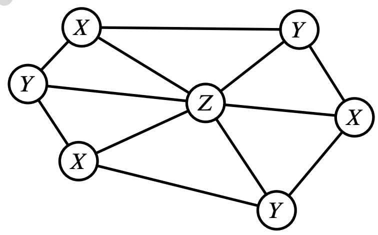
Bài 14. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau và chia hết cho 25?

Lời giải. Các số thỏa mãn yêu cầu phải có dạng $\overline{ab25}$ với a, b là các chữ số phân biệt khác 2 và 5. Do đó a có 4 cách chọn và ứng với mỗi cách chọn của a, ta có 3 cách chọn chữ số b. Như vậy, số số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $4 \cdot 3 = \boxed{12}$. □

Bài 15. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu các hình tròn trong hình vẽ bên dưới sao cho mỗi hình tròn được tô bởi một trong ba màu xanh, đỏ, vàng, và hai hình tròn được nối với nhau bởi một đoạn thẳng có màu khác nhau?



Lời giải. Mỗi cách tô màu thỏa mãn yêu cầu đề bài phải có dạng như hình vẽ bên dưới. (X, Y, Z là các màu.)



Vì có $3! = 6$ cách chọn màu cho X, Y Z nên có tất cả $\boxed{6}$ cách tô màu thỏa mãn yêu cầu đề bài. □

Bài 16. Trong một chiếc thùng có chứa 20 quả bóng được đánh số $1, 2, \ldots, 20$. Hỏi, một người bị bịt mắt cần lấy ra ít nhất bao nhiêu quả để trong số bóng lấy ra chắc chắn có ba quả được đánh bởi ba số liên tiếp?

Lời giải. Xét các quả bóng được đánh số 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20. Trong các quả bóng này không có ba quả nào được đánh số liên tiếp, do đó tổng số quả bóng cần lấy ra phải không ít hơn 15.

Ta sẽ chứng minh rằng 15 quả là đủ. Thật vậy, giả sử tồn tại một cách lấy 15 quả bóng sao cho không có ba quả bóng nào được đánh số liên tiếp. Xét các nhóm $\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{4,\ 5,\ 6\}$, $\ldots$, $\{16,\ 17,\ 18\}$, $\{19,\ 20\}$ (có tất cả 7 nhóm). Ta thấy, ở mỗi nhóm chỉ có thể có tối đa hai số được dùng để đánh số thứ tự cho các quả bóng. Như vậy, số quả bóng lấy ra không quá $2 \cdot 7 = 14$, mâu thuẫn. Vậy, số quả bóng ít nhất cần lấy ra là $\boxed{15}$. □

Bài 17. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có dạng $N = \overline{3a4b}$ mà $(N - 17)$ là bội của 33? (a và b là các chữ số.)

Lời giải. Ta có $N - 17 = 100a + b + 3023 \equiv a + b + 20 \pmod{33}$. Do đó $N - 17$ chia hết cho 33 khi và chỉ khi $a + b + 20$ chia hết cho 33. Mặt khác, ta lại có $20 \leqslant a + b + 20 \leqslant 38$ nên $a + b + 20 = 33$, tức $a + b = 13$. Suy ra (a, b) là một trong các cặp số $(9, 4)$, $(4, 9)$, $(8, 5)$, $(5, 8)$, $(7, 6)$, $(6, 7)$. Vậy, có tất cả $\boxed{6}$ số N thỏa mãn yêu cầu đề bài. □

Bài 18. Trên bảng có một số tự nhiên có hai chữ số.

- Bạn An nói: "*Đây là số chẵn nhưng không chia hết cho* 4".
- Bạn Bình nói: "*Đây là tích của hai số giống nhau*".
- Bạn Cường nói: "*Số này là một lũy thừa của* 3".

Biết rằng có một bạn nói sai, hai bạn còn lại đúng. Hỏi, số trên bảng là số nào?

Lời giải. Giả sử An và Bình cùng nói đúng, thế thì số cần tìm là một số chính phương chẵn không chia hết cho 4, mâu thuẫn. Do đó, trong hai bạn An và Bình có một bài nói sai, suy ra Cường nói đúng, tức số cần tìm là một lũy thừa của 3. Suy ra An nói sai và Bình nói đúng. Vậy số cần tìm là một lũy thừa của 3, cũng đồng thời là một số chính phương, và số này có hai chữ số. Chỉ có một số có tính chất như vậy, đó là số $\boxed{81}$. □

Bài 19. Trên mặt phẳng, xét 17 điểm phân biệt và một đường thẳng ℓ không đi qua điểm nào trong các điểm đó. Hỏi, đường thẳng ℓ có thể cắt nhiều nhất bao nhiêu đoạn thẳng mà mỗi đoạn thẳng có hai đầu mút là hai trong 17 điểm nói trên?

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử đường thẳng ℓ nằm thẳng đúng và bên trái ℓ có a điểm, bên phải ℓ có b điểm. Hiển nhiên $a + b = 17$. Ta có tổng số đoạn thẳng cắt đường thẳng ℓ là

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} = \frac{289 - (a-b)^2}{4}.$$

Vì $a + b$ và $a - b$ cùng tính chẵn lẻ nên $a - b$ lẻ, suy ra $(a - b)^2 \geqslant 1$ và $ab \leqslant \frac{289-1}{4} = 72$. Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi bên trái ℓ có 9 điểm và bên phải ℓ có 8 điểm. Vậy, số đoạn thẳng nhiều nhất mà đường thẳng ℓ có thể cắt được là $\boxed{72}$. □

Bài 20. Hỏi, có bao nhiêu cặp số tự nhiên (m, n) sao cho m là ước của 210, và n là ước của m?

Lời giải. Đặt $m = xn$ và $210 = ym$ với x, y nguyên dương. Khi đó, ta có

$$xyn = 210. \tag{1}$$

Rõ ràng số các cặp số tự nhiên (m, n) thỏa mãn yêu cầu chính bằng số các bộ số nguyên dương (x, y, n) thỏa mãn (1). Mặt khác, ta có chú ý rằng 210 có 14 cách viết thành tích ba số nguyên dương là

$$\begin{aligned} 210 &= 1 \cdot 1 \cdot 210 = 1 \cdot 2 \cdot 105 = 1 \cdot 3 \cdot 70 = 1 \cdot 5 \cdot 42 = 1 \cdot 6 \cdot 35 = 1 \cdot 7 \cdot 30 = 1 \cdot 10 \cdot 21 = 1 \cdot 14 \cdot 15 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 35 = 2 \cdot 5 \cdot 21 = 2 \cdot 7 \cdot 15 = 3 \cdot 5 \cdot 14 = 3 \cdot 7 \cdot 10 = 5 \cdot 6 \cdot 7. \end{aligned}$$

Cách viết đầu cho ta tương ứng ba bộ số nguyên dương (x, y, n) thỏa mãn (1), mỗi cách viết trong các cách còn lại cho ta tương ứng 6 bộ số nguyên dương (x, y, n) thỏa mãn (1). Do đó, tổng số bộ số nguyên dương (x, y, n) thỏa mãn (1) là $3 + 13 \cdot 6 = 81$. Vậy, có tất cả $\boxed{81}$ cặp số tự nhiên (m, n) thỏa mãn yêu cầu. □