



Ngày thi: 21/04/2019

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1 (10 điểm). Cho hai số x, y có tổng bằng 2. Chứng minh rằng

$$(x^2 + x + 1)(y^2 - y + 1) \geq 3.$$

Hỏi dấu bằng xảy ra khi nào?

Câu 2 (15 điểm). Cho a, b, c là các số nguyên, sao cho $ab + bc + ca + 1$ chia hết cho 4. Chứng minh rằng $a + b + c + abc$ cũng chia hết cho 4.

Câu 3 (15 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Trên cung BC nhỏ của (O) , lấy điểm D tùy ý, khác B, C . Hạ $DX \perp BC$ và $DY \perp AC$. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AB, XY . Chứng minh rằng $\widehat{DNM} = 90^\circ$.

Câu 4 (20 điểm). Cho hai số nguyên dương m, n và số nguyên tố p sao cho

$$p = \frac{m+n}{2} + 3\sqrt{mn}.$$

Chứng minh rằng $p + 4m$ và $p + 4n$ là các số chính phương.

Câu 5 (20 điểm). Có 2019 tấm thẻ, trên mỗi tấm thẻ có ghi một số nguyên dương không vượt quá 2019, và hai số ghi trên hai tấm thẻ bất kì là khác nhau. Hỏi có hay không số nguyên dương n sao cho ta có thể xếp 2019 tấm thẻ đó vào n chiếc hộp, thỏa mãn điều kiện: trong mỗi hộp, có thể chia các tấm thẻ thành hai nhóm mà tổng các số ghi trên các tấm thẻ của một nhóm bằng $\frac{2}{7}$ tổng các số ghi trên các tấm thẻ của nhóm còn lại?

(Nếu trong nhóm chỉ có một tấm thẻ thì tổng các số ghi trên các tấm thẻ của nhóm đó là số trên chính tấm thẻ ấy.)

Câu 6 (20 điểm). Xét tất cả các tấm vé số mà trên mỗi tấm có in một số có chín chữ số, được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3. Hai tấm vé số được gọi là “tách biệt” nếu trên đó có in các số $\overline{a_1a_2\dots a_9}$ và $\overline{b_1b_2\dots b_9}$ mà $a_i \neq b_i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, 9$.

- (a) Chứng minh rằng có thể dùng ba màu xanh, đỏ và vàng để tô tất cả các tấm vé số nói trên, sao cho mỗi tấm vé được tô một màu, và hai vé tách biệt được tô màu khác nhau.
- (b) Xét một cách tô thỏa mãn điều kiện ở phần (a). Giả sử trong cách tô đó, vé 122222222 được tô màu đỏ, vé 222222222 được tô màu vàng; hỏi vé 123123123 được tô màu nào?

_____ Hết _____