



“Trên bước đường thành công không có dấu chân của kẻ lười biếng.”

Bài 1. Ba bạn An, Bình và Chi cùng mua đồ tại một hiệu sách. An mua 1 bút chì, 15 quyển vở và 2 bút máy; Bình mua 2 bút chì, 25 quyển vở và 4 bút máy; Chi mua 3 bút chì, 10 quyển vở và 6 bút máy. Biết rằng, An mua hết 185 nghìn đồng, Bình mua hết 345 nghìn đồng. Hỏi, Chi mua hết bao nhiêu tiền?

Lời giải. Gọi giá tiền mỗi bút chì, mỗi quyển vở và mỗi bút máy lần lượt là a , b , c (đơn vị: nghìn đồng). Theo giả thiết, ta có

$$a + 15b + 2c = 185 \quad (1)$$

và

$$2a + 25b + 4c = 345. \quad (2)$$

Lấy $2 \times (1) - (2)$, ta được $5b = 2(a + 15b + 2c) - (2a + 25b + 4c) = 25$. Từ đó, kết hợp với (1), ta được $a + 2c = 185 - 3 \cdot 25 = 110$. Vậy, tổng số tiền Chi đã mua đồ là

$$3a + 10b + 6c = 3(a + 2c) + 2 \cdot 5b = 3 \cdot 110 + 2 \cdot 25 = \boxed{380}. \quad \square$$

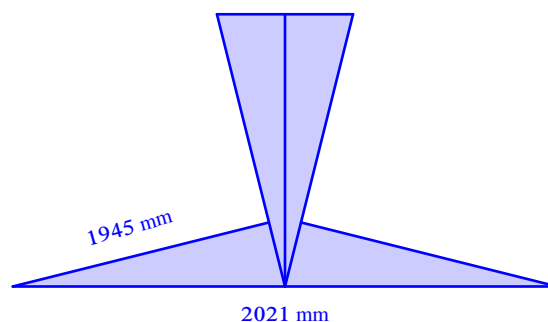
Bài 2. Trên bàn có năm tấm thẻ, trên đó được ghi các số 6, 14, 15, 25 và 35 (trên mỗi thẻ ghi một số). Hai bạn Hùng và Yên, mỗi bạn lấy 2 trong 5 tấm thẻ đó. Biết rằng, tích các số ghi trên hai tấm thẻ, mà mỗi bạn đã lấy, là như nhau. Hỏi, ở tấm thẻ còn lại trên bàn có ghi số mấy?

Lời giải. Từ giả thiết suy ra tích số trên các tấm thẻ mà cả hai bạn lựa chọn phải là một số chính phương. Mặt khác, ta thấy $6 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 25 \cdot 35 = (2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7)^2$ cũng là số chính phương, do đó tấm thẻ còn lại trên bàn phải ghi một số chính phương, tức là số $\boxed{25}$. \square

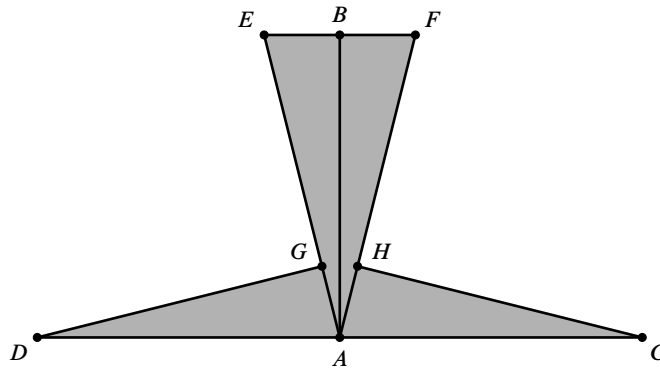
Bài 3. Có 3 chiếc thùng, trong đó thùng 1 đang đựng đầy nước, thùng 2 và thùng 3 không có nước. Nếu đổ hết nước từ thùng 1 sang thùng 2 thì mới được $\frac{1}{3}$ thùng. Nếu đổ hết nước từ thùng 1 sang thùng 3 thì khi thùng 3 đầy nước, ở thùng 1 còn lại $\frac{2}{3}$ thùng. Biết rằng, cả 3 thùng chứa được 260 lít nước. Hỏi, thùng 1 chứa được bao nhiêu lít nước?

Lời giải. Từ giả thiết thứ nhất suy ra thể tích thùng 1 bằng $\frac{1}{3}$ thể tích thùng 2, tức là thể tích thùng 2 gấp 3 lần thể tích thùng 1. Từ giả thiết thứ hai suy ra thể tích thùng 3 bằng $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ thể tích thùng 1. Như vậy, tổng thể tích của ba thùng bằng $3 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$ thể tích thùng 1. Từ đây, ta suy ra thùng 1 chứa được tổng cộng $260 \div \frac{13}{3} = \boxed{60}$ lít nước. \square

Bài 4. Có bốn tấm tôn giống hệt nhau, mỗi tấm đều có hình tam giác vuông với cạnh huyền bằng 2021 mm và một cạnh góc vuông bằng 1945 mm. Tính chu vi của hình nhận được, sau khi ghép 4 tấm tôn đó như dưới đây.



Lời giải. Gọi tên các đỉnh của hình đã cho như dưới đây.



Do các tâm tôn giống hệt nhau nên $EB = BF = AG = AH$, $AC = AD = AE = AF = 2021$ (mm) và $DG = CH = 1945$ (mm). Từ đó suy ra chu vi p của hình đã cho là

$$\begin{aligned} p &= DG + GE + EB + BF + FH + HC + CA + AD \\ &= (DG + CH) + (AC + AD) + GE + GA + FH + HA \\ &= (DG + CH) + (AC + AD) + (AE + AF) \\ &= 2 \cdot 1945 + 4 \cdot 2021 = 11974 \text{ (mm)}. \end{aligned}$$

Vậy $p = \boxed{11974 \text{ (mm)}}$. □

Bài 5. Trong năm 2021 có bao nhiêu ngày mà số thứ tự tháng và số thứ tự ngày của nó đều là số nguyên tố (ví dụ 31/3 là một ngày như thế)?

Lời giải. Trước hết, ta thấy số thứ tự tháng phải là một số nguyên tố không vượt quá 12, đó là một trong năm số 2, 3, 5, 7, 11. Với số thứ tự ngày, ta thấy có 11 số nguyên tố không vượt quá 31 là 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 có khả năng được dùng làm số thứ tự ngày. Để ý rằng tháng 11 chỉ có 30 ngày và tháng 2 chỉ có 28 ngày do 2021 không phải năm nhuận, do đó số ngày thỏa mãn yêu cầu là $5 \cdot 11 - 1 - 2 = \boxed{52}$ ngày. □

Bài 6. Ba bạn Nobita, Xuka và Chaien cùng nhau gấp hạc giấy. Biết rằng, Xuka gấp nhanh gấp đôi Nobita, còn Nobita gấp nhanh gấp rưỡi Chaien. Tổng số con hạc mà Nobita và Chaien gấp được là 120. Hỏi, Xuka gấp được bao nhiêu con?

Lời giải. Từ giả thiết suy ra tốc độ gấp của Chaien bằng $\frac{2}{3}$ tốc độ gấp của Nobita, suy ra số con hạc mà Nobita và Chaien gấp được bằng $1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ số hạc mà Nobita gấp. Do đó, số hạc mà Nobita gấp là $120 \div \frac{5}{3} = 72$ con, suy ra số hạc mà Xuka đã gấp là $72 \cdot 2 = \boxed{144}$ con. □

Bài 7. Cho tam giác ABC . Hỏi, có bao nhiêu đường thẳng chia tam giác ABC thành hai tam giác, mà một trong hai tam giác đó có diện tích gấp đôi diện tích tam giác còn lại?

Lời giải. Đầu tiên, ta thấy rằng một đường thẳng chia tam giác thành hai tam giác nhỏ thì đường thẳng đó phải đi qua một đỉnh của tam giác. Khi đó, hai tam giác được chia có chung chiều cao hạ từ đỉnh mà đường thẳng đã đi qua, nên để chia được thành hai tam giác thỏa mãn các yêu cầu thì đường thẳng đó phải đi qua một điểm chia cạnh đối diện với đỉnh mà đường thẳng đó đã đi qua thành hai đoạn mà độ dài đoạn này gấp đôi đoạn kia. Rõ ràng trên mỗi đoạn thẳng có hai điểm như vậy, nên số đường thẳng thỏa mãn yêu cầu là $2 \cdot 3 = \boxed{6}$ đường thẳng. □

Bài 8. Đặt $m = 3^{27}$. Gọi x là số tự nhiên thỏa mãn $m^m = 3^x$. Tìm số tự nhiên n sao cho $3^n = x$.

Lời giải. Theo giả thiết, ta có $3^x = m^m = (3^{27})^m = 3^{27m}$. Do đó $x = 27m = 27 \cdot 3^{27} = 3^{30}$. Vì số tự nhiên n thỏa mãn $3^n = x$ nên $n = \boxed{30}$. □

Bài 9. Người ta sơn toàn bộ 6 mặt của một khối lập phương bằng gỗ, cạnh 3 dm, và dùng hết 360 gam sơn. Sau đó, người ta cắt khối lập phương thành 27 khối lập phương nhỏ rời nhau, có cạnh 1 dm. Hỏi, cần dùng thêm bao nhiêu gam sơn để sơn hết những mặt chưa được sơn của tất cả các khối lập phương nhỏ?

Lời giải. Theo đề bài thì 360 gam sơn đã được dùng để sơn $6 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ (dm²) diện tích bề mặt khối lập phương lớn, tức là cứ 3 dm² diện tích thì cần $360 \div (54 \div 3) = 20$ (gam) sơn. Sau khi cắt thì tổng diện tích bề mặt là $27 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 = 162$ (dm²), nên cần phải sơn thêm $162 - 54 = 108$ (dm²). Vậy cần dùng thêm $20 \cdot (108 \div 3) = \boxed{720 \text{ (gam)}}$ sơn để sơn hết những mặt chưa được sơn của tất cả các khối lập phương nhỏ. \square

Bài 10. Chiều cao trung bình của Xuân và Hạ lớn hơn chiều cao của Xuân 2 cm. Chiều cao trung bình của Xuân, Hạ và Thu lớn hơn chiều cao trung bình của Xuân và Hạ 2 cm. Hỏi, Thu cao hơn Xuân bao nhiêu cm?

Lời giải. Vì chiều cao trung bình của Xuân và Hạ lớn hơn chiều cao của Xuân 2 cm nên tổng chiều cao của Xuân và Hạ lớn hơn hai lần chiều cao của Xuân 4 cm. (1)

Từ giả thiết, ta cũng có chiều cao trung bình của Xuân, Hạ và Thu lớn hơn chiều cao của Xuân 4 cm. Suy ra tổng chiều cao của Xuân, Hạ và Thu lớn hơn ba lần chiều cao của Xuân 12 cm. (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra Thu cao hơn Xuân $12 - 4 = \boxed{8 \text{ (cm)}}$. \square

Bài 11. Trong 2021 số nguyên dương đầu tiên, có bao nhiêu số không chia hết cho 3 và các chữ số của nó chỉ là 0 hoặc 2?

Lời giải. Các số chỉ gồm các chữ số 0 và 2 trong 2021 số nguyên dương đầu tiên là 0, 2, 20, 22, 200, 202, 220, 222, 2000, 2002, 2020, trong đó 0 và 222 chia hết cho 3. Vậy có $\boxed{9}$ số thỏa mãn yêu cầu. \square

Bài 12. Số $N = \overline{a22\dots 22b}$ có 2021 chữ số, trong đó tất cả các chữ số nằm giữa hai chữ số a và b đều là 2. Biết rằng, N chia hết cho 72. Tìm a, b .

Lời giải. Vì $72 = 8 \cdot 9$ và 8, 9 nguyên tố cùng nhau nên để N chia hết cho 72 thì N phải chia hết cho 8 và 9. Ta thấy N có $2021 - 2 = 2019$ chữ số 2 không kể a, b nên tổng các chữ số của N là $a + b + 2 \cdot 2019 = 4038 + a + b$. Tổng này phải chia hết cho 9 nên $a + b + 6$ chia hết cho 9.

Mặt khác, do N chia hết cho 8 nên số $\overline{22b}$ chia hết cho 8, tức là số $220 + b = 216 + b + 4$ chia hết cho 8. Suy ra $b + 4$ chia hết cho 8. Mà $0 \leq b < 10$ nên $b = 4$. Từ đó, ta có $a + 10$ chia hết cho 9. Dễ thấy $9 < a + 10 < 27$ nên $a + 10 = 18$, suy ra $a = 8$. Vậy $\boxed{(a, b) = (8, 4)}$. \square

Bài 13. Mỗi bạn An, Bình và Cường đều viết ra danh sách 20 quyển truyện tranh mình đã đọc trong kỳ nghỉ Tết vừa qua. Sau khi gạch bỏ tên những quyển truyện được nhiều hơn một người đọc, danh sách của An còn lại 13 quyển, danh sách của Bình còn lại 16 quyển. Hỏi, danh sách của Cường còn lại ít nhất bao nhiêu quyển?

Lời giải. Từ giả thiết suy ra An và Cường đọc chung tối đa $20 - 13 = 7$ quyển, còn Bình và Cường đọc chung tối đa $20 - 16 = 4$ quyển. Do đó, danh sách của Cường có ít nhất $20 - 7 - 4 = \boxed{9}$ quyển. \square

Bài 14. Tìm số chính phương nhỏ nhất có đúng 4 ước nguyên tố phân biệt.

Lời giải. Rõ ràng bốn ước này nguyên tố cùng nhau, và do số cần tìm là số chính phương nên số mũ của mỗi ước nguyên tố phải là số chẵn khác 0. Từ đó suy ra số nhỏ nhất cần tìm là $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^2 = \boxed{44100}$. \square

Bài 15. Một người đổi một tờ 200 nghìn đồng thành các tờ tiền có mệnh giá 1 nghìn đồng, 2 nghìn đồng và 5 nghìn đồng (mỗi loại mệnh giá đều có ít nhất một tờ). Biết rằng, số tờ 2 nghìn đồng gấp 10 lần số tờ 1 nghìn đồng. Hỏi, có bao nhiêu tờ 5 nghìn đồng?

Lời giải. Gọi x là số các tờ tiền mệnh giá 1 nghìn đồng và y là số các tờ tiền mệnh giá 5 nghìn đồng. Khi đó, ta có $10x$ là số các tờ tiền mệnh giá 2 nghìn đồng. Theo giả thiết, ta có $1 \cdot x + 2 \cdot 10x + 5 \cdot y = 200$, hay

$$21x + 5y = 200.$$

Từ đây, dễ thấy x chia hết cho 5. Ngoài ra, vì $y \geq 1$ nên $21x \leq 195$, tức $x \leq 9$. Mà $x \geq 1$ nên $x = 5$. Suy ra $y = \frac{200 - 21 \cdot 5}{5} = 19$. Vậy có tất cả $\boxed{19}$ tờ tiền mệnh giá 5 nghìn đồng. \square

Bài 16. Ta viết 10 số nguyên dương đầu tiên thành “hình tam giác” như sau.

7
4 8
2 5 9
1 3 6 10

Hỏi, nếu tiếp tục viết các số nguyên dương tiếp theo, theo quy tắc được thể hiện ở hình trên, thì số 2021 nằm ở cột thứ bao nhiêu, tính từ trái qua phải?

Lời giải. Theo quy tắc viết như trên, khi viết được đủ n cột thì số lượng số đã được viết là

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ngoài ra, số cuối cùng của mỗi đường chéo (đọc từ trên xuống và từ qua phải) đều nằm ở hàng dưới cùng và bằng $\frac{n(n+1)}{2}$. Ta thấy $63 \cdot 64 = 4032 < 4042 = 2 \cdot 2021 < 4160 = 64 \cdot 65$ nên $\frac{63 \cdot 64}{2} < 2021 < \frac{64 \cdot 65}{2}$, suy ra số 2021 nằm trên “đường chéo” thứ 64. Vì cách viết của ta theo thứ tự từ trái sang phải nên số 2021 sẽ nằm ở cột thứ $2021 - \frac{63 \cdot 64}{2} = 5$ tính từ trái qua phải. \square

Bài 17. Kể từ khi có lợn tiết kiệm, mỗi ngày An đều bỏ vào lợn k nghìn đồng, với k là một số nguyên dương. Tính đến hết ngày sinh nhật hôm nay, An bỏ lợn được 500 nghìn đồng. Tính đến hết ngày đầu tiên của tháng sinh nhật năm nay, An bỏ lợn được 400 nghìn đồng; tính đến hết ngày cuối cùng của tháng đó, An bỏ lợn được 535 nghìn đồng. Hỏi sinh nhật của An là ngày, tháng nào?

Lời giải. Theo giả thiết, ta thấy k là một ước chung của 500, 400 và 535 nên $k = 1$ hoặc $k = 5$. Do đó, không kể ngày thứ nhất thì trong tháng đó An đã bỏ thêm được $535 - 400 = 135$ nghìn đồng. Vì mỗi tháng chỉ có tối đa 31 ngày nên $k = 5$. Suy ra, số ngày trong tháng đó là $\frac{135}{5} + 1 = 28$, như vậy tháng đó là tháng Hai. Mặt khác, ta thấy rằng, từ lúc bắt đầu tháng đến hết ngày sinh nhật của An là đã trải qua $\frac{500-400}{5} + 1 = 21$ ngày. Vậy, sinh nhật của An là ngày $21/2$. \square

Bài 18. Có bao nhiêu phân số tối giản $\frac{a}{b}$, mà a, b là các số nguyên dương, $b > 1$, thỏa mãn $ab = 210$?

Lời giải. Đầu tiên, ta tìm cách phân tích 210 thành tích của hai số nguyên tố cùng nhau. Vì $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ nên ta có 8 cách phân tích như sau

$$210 = 1 \cdot 210 = 2 \cdot 105 = 3 \cdot 70 = 5 \cdot 42 = 7 \cdot 30 = 6 \cdot 35 = 10 \cdot 21 = 14 \cdot 15.$$

Ta thấy rằng, trừ cách đầu tiên chỉ tạo ra được một phân số, mỗi các còn lại đều tạo ra được hai phân số. Do đó, có tất cả $7 \cdot 2 + 1 = 15$ phân số thỏa mãn yêu cầu. \square

Bài 19. Một quán giải khát có 6 bình đựng nước hoa quả, trong đó có 1 bình nước Mơ, các bình còn lại đựng nước Dâu và nước Sầu. Thể tích nước hoa quả trong các bình là 15 l, 10 l, 18 l, 19 l, 20 l, 31 l. Biết rằng số lít nước Dâu gấp đôi số lít nước Sầu. Hỏi quán đó có bao nhiêu lít nước Mơ?

Lời giải. Từ giả thiết suy ra tổng số lít nước Dâu và Sầu gấp $2 + 1 = 3$ lần số lít nước Sầu, do đó phải là bội của 3. Tổng số lít nước cả ba loại là $15 + 10 + 18 + 19 + 20 + 31 = 113$ là một số chia 3 dư 2, do đó số lít nước Mơ cũng phải là một số chia 3 dư 2. Chỉ có số 20 thỏa mãn điều này. Vậy quán có 20 lít nước Mơ. \square

Bài 20. Có bao nhiêu cách xếp năm bạn An, Bình, Chi, Duy, Giang thành một hàng dọc sao cho An và Chi cùng đứng trước Giang, còn Bình đứng trước Duy?

Lời giải. Đầu tiên, ta chọn hai vị trí cho Bình và Duy. Để ý rằng với mỗi cách chọn hai trong năm vị trí, chỉ có đúng một cách xếp mà Bình đứng trước Duy, do đó có $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ cách chọn vị trí cho Bình và Duy. Sau khi xếp chỗ cho Bình và Duy thì còn lại ba vị trí, ta thấy Giang đứng dưới hai người còn lại nên Giang chỉ có 1 cách chọn vị trí là vị trí dưới cùng trong ba vị trí còn lại này. Còn lại hai vị trí để xếp An và Chi, để thấy có 2 cách xếp. Vậy số cách xếp thỏa mãn yêu cầu là $10 \cdot 2 = 20$ cách. \square