LỜI GIẢI ĐỀ TOÁN CHUYÊN LỚP 10/2018 THPT CHUYÊN KHTN

Trần Nam Dũng – Võ Quốc Bá Cẩn – Nguyễn Lê Phước – Nguyễn Mạnh Linh

1. Đề thi

Bài 1.

a) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy(x+y) = 2, \\ x^3 + y^3 + x^3y^3 + 7(x+1)(y+1) = 31. \end{cases}$$

b) Giải phương trình:

$$9 + 3\sqrt{x(3-2x)} = 7\sqrt{x} + 5\sqrt{3-2x}.$$

Bài 2.

a) Cho x, y là các số nguyên sao cho $x^2 - 2xy - y$ và $xy - 2y^2 - x$ đều chia hết cho 5. Chứng minh rằng $2x^2 + y^2 + 2x + y$ cũng chia hết cho 5.

b) Cho $a_1, a_2, \ldots, a_{50}$ là các số nguyên thỏa mãn $1 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{50} \le 50$ và $a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} = 100$. Chứng minh rằng từ các số đã cho, ta có thể chọn được một vài số có tổng bằng 50.

Bài 3. Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ nội tiếp đường tròn (O) có CD song song với BE. Hai đường chéo CE và BD cắt nhau tại P. Điểm M thuộc đoạn thẳng BE sao cho $\angle MAB = \angle PAE$. Điểm K thuộc đường thẳng AC sao cho MK song song với AD, điểm L thuộc đường thẳng AD sao cho ML song song với AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác KBC lần lượt cắt BD, CE tại Q, S (Q khác B, S khác C).

a) Chứng minh rằng ba điểm K, M, Q thẳng hàng.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác LDE lần lượt cắt BD, CE tại T, R (T khác D, R khác E). Chứng minh rằng năm điểm M, S, Q, R, T cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc với đường tròn (O).

Bài 4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{a+b}} + \sqrt{\frac{bc}{b+c}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}}\right) \le 2.$$

2. Lời giải và bình luận các bài toán

Bài 1.

a) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy(x+y) = 2, \\ x^3 + y^3 + x^3y^3 + 7(x+1)(y+1) = 31. \end{cases}$$

b) Giải phương trình:

$$9 + 3\sqrt{x(3-2x)} = 7\sqrt{x} + 5\sqrt{3-2x}.$$

Lời giải. a) Đặt $a = x + y$ và $b = xy$ $(a^2 \geq 4b)$. Hệ phương trình có thể được viết lại thành

$$\begin{cases} ab = 2, \\ a^3 - 3ab + b^3 + 7(a+b+1) = 31. \end{cases}$$

Từ đó, ta có

$$\begin{aligned} 31 &= a^3 - 3ab + b^3 + 7(a+b+1) \\ &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) + 7(a+b) + 1 \\ &= (a+b)^3 + (a+b) + 1. \end{aligned}$$

Suy ra $(a+b)^3+(a+b)-30 = 0$ hay $a+b = 3$ (vì nếu $a+b > 3$ thì $(a+b)^3+(a+b)-30 > 0$, còn nếu $a+b < 3$ thì $(a+b)^3 + (a+b) - 30 < 0$).

Giải hệ phương trình $a + b = 3$ và $ab = 2$ với chú ý $a^2 \geq 4b$, ta được $a = 2$ và $b = 1$. Từ đó dễ dàng tính được $x = y = 1$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x,\ y) = (1,\ 1)$.

b) Điều kiện: $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$. Đặt $a = \sqrt{x}$ và $b = \sqrt{3-2x}$ thì ta có $a,\ b \geq 0$ và $2a^2 + b^2 = 3$. Ngoài ra, từ giả thiết, ta cũng có

$$9 + 3ab = 7a + 5b. \tag{1}$$

Từ đó, ta có

$$2a^2 + b^2 + 3ab + 6 = 7a + 5b,$$

hay

$$(a+b-2)(2a+b-3) = 0.$$

Suy ra $b = 2 - a$ hoặc $b = 3 - 2a$.

- Với $b = 2 - a$, thay vào (1), ta được $9 + 3a(2-a) = 2a + 10$. Giải phương trình này, ta được $a = \frac{1}{3}$ (tương ứng, $b = \frac{5}{3}$ và $x = \frac{1}{9}$) hoặc $a = 1$ (tướng ứng, $b = 1$ và $x = 1$).
- Với $b = 3 - 2a$, thay vào (1), ta được $9 + 3a(3-2a) = 7a + 5(3-2a)$. Giải phương trình này, ta được $a = 1$ (tương ứng, $b = 1$ và $x = 1$).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm ai nghiệm là $x = \frac{1}{9}$ và $x = 1$. □

Bài 2.

a) Cho $x,\ y$ là các số nguyên sao cho $x^2 - 2xy - y$ và $xy - 2y^2 - x$ đều chia hết cho 5. Chứng minh rằng $2x^2 + y^2 + 2x + y$ cũng chia hết cho 5.

b) Cho $a_1, a_2, \ldots, a_{50}$ là các số nguyên thỏa mãn $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{50} \leq 50$ và $a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} = 100$. Chứng minh rằng từ các số đã cho, ta có thể chọn được một vài số có tổng bằng 50.

Lời giải. a) Từ giả thiết, ta suy ra $(x+y)(x-2y-1) = (x^2-2xy-y) + (xy-2y^2-x)$ chia hết cho 5. Do đó, trong hai số $x+y$ và $x-2y-1$ có ít nhất một số chia hết cho 5.

- Nếu $x + y$ chia hết cho 5 thì ta có $y \equiv -x \pmod 5$, suy ra
$$0 \equiv x^2 - 2xy - y \equiv x^2 + 2x^2 + x \equiv x(3x+1) \pmod 5.$$
Do đó x hết cho 5 hoặc x chia 5 dư 3.
  - Nếu x chia hết cho 5 thì ta cũng có y chia hết cho 5 (do $x + y$ chia hết cho 5) nên hiển nhiên $2x^2 + y^2 + 2x + y$ chia hết cho 5.
  - Nếu x chia 5 dư 3 thì y chia 5 dư 2 (do $x + y$ chia hết cho 5) nên
  $$2x^2 + y^2 + 2x + y \equiv 2 \cdot 3^2 + 2^2 + 2 \cdot 3 + 2 \equiv 0 \pmod 5.$$
- Nếu $x - 2y - 1$ chia hết cho 5 thì ta có $x \equiv 2y + 1 \pmod 5$, suy ra
$$0 \equiv x^2 - 2xy - y \equiv (2y+1)^2 - 2y(2y+1) - y \equiv y + 1 \pmod 5.$$
Do đó y chia 5 dư 4 và x cũng chia 5 dư 4 (do $x - 2y - 1$ chia hết cho 5). Từ đó, ta có
$$2x^2 + y^2 + 2x + y \equiv 2 \cdot 4^2 + 4^2 + 2 \cdot 4 + 4 \equiv 0 \pmod 5.$$

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta luôn có $2x^2 + y^2 + 2x + y$ chia hết cho 5.

b) Nếu tồn tại chỉ số $n\ (1 \leq n \leq 50)$ sao cho $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 50$ thì kết luận của bài toán là hiển nhiên.

Xét trường hợp ngược lại, khi đó tồn tại chỉ số $n\ (1 \leq n \leq 49)$ sao cho
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq 49, \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} \geq 51. \tag{1}$$
Từ đây suy ra $a_{n+1} \geq 2$. Ta xét hai trường hợp sau.

- **Trường hợp 1: $a_{n+1} = 2$.** Từ (1), dễ thấy $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 49$, suy ra
$$a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{50} = 49.$$
Nếu $n \leq 24$ thì do $a_1 \leq a_{n+2}, a_2 \leq a_{n+3}, \ldots, a_n \leq a_{2n+1}$ nên
$$49 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{2n+1} < a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{49} + a_{50},$$
mâu thuẫn. Vậy $n \geq 25$, suy ra
$$49 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq na_1 \geq 25a_1.$$
Từ đây, ta có $a_1 < 2$ nên $a_1 = 1$. Do đó $a_2 + \cdots + a_n = 48$ và $a_2 + \cdots + a_{n+1} = 50$.

- **Trường hợp 2: $a_{n+1} \geq 3$.** Lúc này, do

$$a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{50} = 100 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}) \leq 49 \qquad (2)$$

nên $49 \geq (49-n)a_{n+2} \geq (49-n)\cdot 3$, suy ra $n \geq 33$. Do đó, ta có

$$49 \geq (a_1 + \cdots + a_{16}) + (a_{17} + \cdots + a_n) \geq 16 + (n-16)a_{17} \geq 16 + 17a_{17},$$

suy ra $a_{17} < 2$. Mà $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{17}$ và a_i là các số nguyên nên

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{17} = 1.$$

  - Nếu $a_{n+1} \leq 18$, đặt $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} = 50 + k$ với $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, ta có

$$18 \geq a_{n+1} \geq (50+k) - 49 = k+1,$$

  suy ra $k \leq 17$. Từ đây, ta có $a_{k+1} + \cdots + a_{n+1} = 50$ vì $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$.

  - Nếu $a_{n+1} \geq 19$, từ (2) và từ giả thiết, ta có

$$49 \geq (49-n)a_{n+2} \geq (49-n)\cdot 19,$$

  suy ra $n \geq 47$. Từ đây, ta có $a_1 = a_2 = \cdots = a_{45} = 1$, vì nếu $a_{45} \geq 2$ thì

$$(a_1 + \cdots + a_{44}) + (a_{45} + \cdots + a_n) \geq 44 + (n-44)a_{45} \geq 44 + (47-44)\cdot 2 > 49.$$

  Đặt $a_{n+1} = 50 - k$ ($k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq 31$). Khi đó, ta có $a_1 + \cdots + a_k + a_{n+1} = 50$ vì $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$. □

Bài 3. Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ nội tiếp đường tròn (O) có CD song song với BE. Hai đường chéo CE và BD cắt nhau tại P. Điểm M thuộc đoạn thẳng BE sao cho $\angle MAB = \angle PAE$. Điểm K thuộc đường thẳng AC sao cho MK song song với AD, điểm L thuộc đường thẳng AD sao cho ML song song với AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác KBC lần lượt cắt BD, CE tại Q, S (Q khác B, S khác C).

a) Chứng minh rằng ba điểm K, M, Q thẳng hàng.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác LDE lần lượt cắt BD, CE tại T, R (T khác D, R khác E). Chứng minh rằng năm điểm M, S, Q, R, T cùng thuộc một đường tròn.

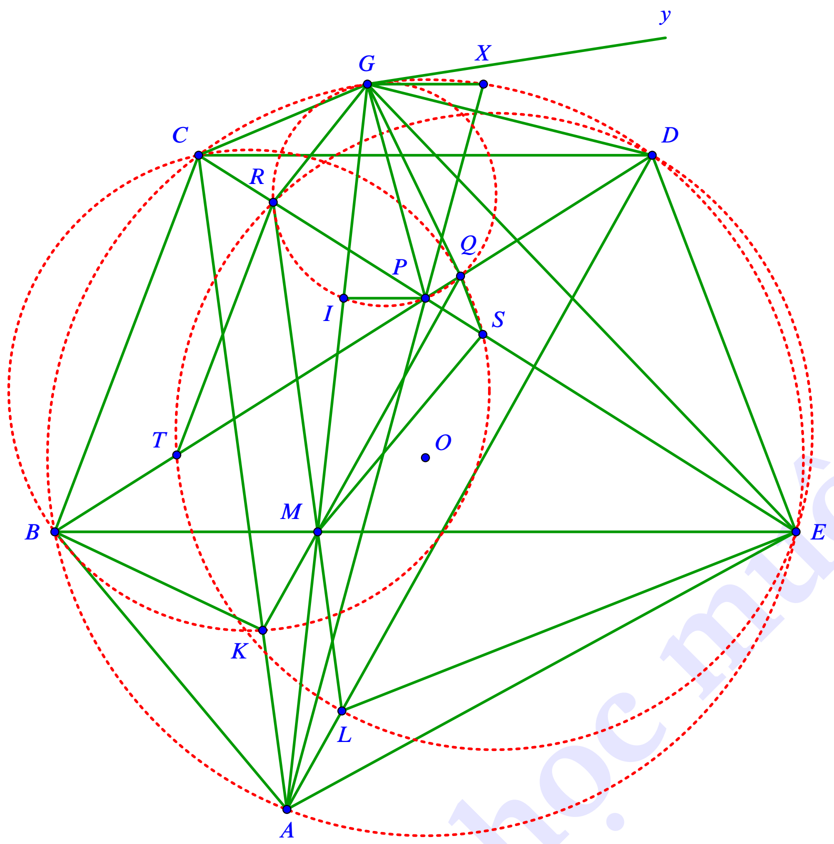
c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc với đường tròn (O).

Lời giải. **a)** Do các tứ giác $BCQK$ và $BCDA$ nội tiếp nên $\angle CKQ = \angle CBQ = \angle CAD$, suy ra $KQ \parallel AD$. Mặt khác, ta lại có $MK \parallel AD$ nên ba điểm K, M, Q thẳng hàng.

b) Chứng minh tương tự như câu **a)**, ta cũng có ba điểm R, M, L thẳng hàng.

Ta có $MQ \parallel AD$ nên $\angle RMQ = \angle RLD = \angle RTD$, suy ra tứ giác $RTMQ$ nội tiếp.

Chứng minh tương tự, ta cũng có tứ giác $RMSQ$ nội tiếp. Do đó, năm điểm M, T, R, Q, S cùng thuộc một đường tròn.



c) Gọi G là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM và đường tròn (O). Ta có $MR \parallel AC$ nên $\angle RMG = \angle CAG = \angle CEG$, suy ra tứ giác $RMEG$ nội tiếp.

Chứng minh tương tự, ta cũng có tứ giác $QMBG$ nội tiếp. Ta có

$$\begin{aligned}\angle RGQ &= \angle RGM + \angle QGM = \angle REM + \angle QBM \\ &= 180^\circ - \angle BPE = 180^\circ - \angle RPQ\end{aligned}$$

nên tứ giác $RPQG$ nội tiếp. Bây giờ, gọi I là giao điểm thứ hai của đường thẳng AG và đường tròn (PQR), X là giao điểm thứ hai của đường thẳng AP và đường tròn (O). Ta có $\angle BAM = \angle EAP$ và $\angle BAC = \angle EAD$ (do $BCDE$ là hình thang cân) nên $\angle CAG = \angle XAD$, suy ra $\angle CDG = \angle XGD$. Từ đó, ta có $GX \parallel CD$.

Do $XG \parallel CD$ nên tứ giác $GCDX$ là hình thang cân, mà $PC = PD$ nên $PG = PX$. Ta có $\angle RPI = \angle RGI = \angle REB = \angle RCD$ nên $PI \parallel CD$ hay $PI \parallel GX$.

Kẻ tiếp tuyến Gy của (O). Ta có $\angle XGy = \angle XAG$ và $\angle PGX = \angle PXG = \angle API$ nên

$$\angle GIP = \angle GAX + \angle API = \angle XGy + \angle PGX = \angle PGy.$$

suy ra Gy là tiếp tuyến của đường tròn (GIP). Do đó Gy là tiếp tuyến chung của các đường tròn (O) và (GIP). Vậy đường tròn (PQR) tiếp xúc với đường tròn (O) tại G. □

Bài 4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{a+b}} + \sqrt{\frac{bc}{b+c}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}}\right) \le 2. \qquad (1)$$

Lời giải. Sử dụng các bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}
\mathrm{VT}_{(1)} &\leq \sqrt{2\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}\right)}\cdot\sqrt{2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)}\\
&= 2\sqrt{\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)\left(\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)}\\
&\leq \left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)\\
&= 2.
\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Bình luận. Ngoài cách trên, ta cũng có thể giải bằng cách khác như sau: Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}
\mathrm{VT}_{(1)} &= \frac{\sqrt{ab}}{a+b}+\sqrt{\frac{ab}{(a+b)(b+c)}}+\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(b+c)}}+\frac{\sqrt{bc}}{b+c}\\
&\leq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)+\frac{1}{2}\\
&= 2.
\end{aligned}$$