

# LỜI GIẢI ĐỀ THI LỚP 10/2019 MÔN TOÁN SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO HÀ NỘI

Trần Nam Dũng – Võ Quốc Bá Cẩn

## 1. Đề thi

**Bài 1 (2.0 điểm).** Cho  $x \geq 0$  và  $x \neq 25$ . Xét hai biểu thức

$$A = \frac{4(\sqrt{x} + 1)}{25 - x}$$

và

$$B = \left( \frac{15 - \sqrt{x}}{x - 25} + \frac{2}{\sqrt{x} + 5} \right) \div \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5}.$$

- a) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 9$ .
- b) Rút gọn biểu thức  $B$ .
- c) Tìm tất cả các giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức  $P = AB$  đạt giá trị nguyên lớn nhất.

**Bài 2 (2.5 điểm).**

- a) Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì sau 15 ngày làm xong. Nếu đội thứ nhất làm riêng trong 3 ngày rồi dừng lại và đội thứ hai làm tiếp công việc đó trong 5 ngày thì cả hai đội hoàn thành được 25% công việc. Hỏi, nếu mỗi đội làm riêng thì trong bao nhiêu ngày mới xong công việc trên?
- b) Một bồn nước inox có dạng hình trụ với chiều cao 1,75 m và diện tích đáy là 0,32 m<sup>2</sup>. Hỏi, bồn nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước? (Bỏ qua bề dày của bồn nước.)

**Bài 3 (2.0 điểm).**

- a) Giải phương trình

$$x^4 - 7x^2 - 18 = 0.$$

- b) Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $(d) : y = 2mx - m^2 + 1$  ( $m$  là tham số thực) và parabol  $(P) : y = x^2$ .
  - i) Chứng minh rằng  $(d)$  luôn cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt.
  - ii) Tìm tất cả các giá trị của số thực  $m$  để  $(d)$  cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{2}{x_1 x_2} + 1$ .

**Bài 4 (3.0 điểm).** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn ( $O$ ). Hai đường cao  $BE$  và  $CF$  của tam giác  $ABC$  cắt nhau tại điểm  $H$  ( $E$  thuộc  $CA$ ,  $F$  thuộc  $AB$ ).

- Chứng minh rằng bốn điểm  $B, C, E, F$  cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh rằng đường thẳng  $OA$  vuông góc với đường thẳng  $EF$ .
- Gọi  $K$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ . Đường thẳng  $AO$  cắt đường thẳng  $BC$  tại điểm  $I$ , đường thẳng  $EF$  cắt đường thẳng  $AH$  tại điểm  $P$ . Chứng minh rằng tam giác  $APE$  đồng dạng với tam giác  $AIB$  và đường thẳng  $KH$  song song với đường thẳng  $IP$ .

**Bài 5 (0.5 điểm).** Cho  $a, b$  là các số thực thay đổi thỏa mãn  $a^2 + b^2 + ab = 3$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^4 + b^4 - ab.$$

## 2. Lời giải và bình luận các bài toán

**Bài 1 (2.0 điểm).** Cho  $x \geq 0$  và  $x \neq 25$ . Xét hai biểu thức

$$A = \frac{4(\sqrt{x} + 1)}{25 - x}$$

và

$$B = \left( \frac{15 - \sqrt{x}}{x - 25} + \frac{2}{\sqrt{x} + 5} \right) \div \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5}.$$

- Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 9$ .
- Rút gọn biểu thức  $B$ .
- Tìm tất cả các giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức  $P = AB$  đạt giá trị nguyên lớn nhất.

**Lời giải.** a) Với  $x = 9$ , ta có

$$A = \frac{4(\sqrt{9} + 1)}{25 - 9} = \frac{4(3 + 1)}{16} = \frac{16}{16} = 1.$$

b) Với  $x \geq 0$  và  $x \neq 25$ , ta có

$$\begin{aligned} B &= \left[ \frac{15 - \sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} + \frac{2}{\sqrt{x} + 5} \right] \div \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5} = \frac{15 - \sqrt{x} + 2(\sqrt{x} - 5)}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{x} + 5}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}. \end{aligned}$$

c) Với  $x \geq 0$  và  $x \neq 25$ , ta có

$$P = AB = \frac{4(\sqrt{x} + 1)}{25 - x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{4}{25 - x}.$$

Để  $P$  đạt giá trị lớn nhất thì ta chỉ cần xét trường hợp  $P > 0$ , tức  $x < 25$ . Suy ra  $x \leq 24$  (do  $x \in \mathbb{Z}$ ). Từ đó, ta có  $25 - x \geq 25 - 24 = 1$ . Suy ra

$$P = \frac{4}{25 - x} \leq \frac{4}{1} = 4.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = 24$  (thỏa mãn điều kiện xác định). Vậy  $P$  đạt giá trị nguyên lớn nhất là 4.  $\square$

**Bài 2 (2.5 điểm).**

- a) Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì sau 15 ngày làm xong. Nếu đội thứ nhất làm riêng trong 3 ngày rồi dừng lại và đội thứ hai làm tiếp công việc đó trong 5 ngày thì cả hai đội hoàn thành được 25% công việc. Hỏi, nếu mỗi đội làm riêng thì trong bao nhiêu ngày mới xong công việc trên?
- b) Một bồn nước inox có dạng hình trụ với chiều cao 1,75 m và diện tích đáy là  $0,32 \text{ m}^2$ . Hỏi, bồn nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước? (Bỏ qua bề dày của bồn nước.)

**Lời giải.** a) Gọi  $x$  (số phần công việc/ngày) là năng suất làm việc của đội công nhân thứ nhất và  $y$  (số phần công việc/ngày) là năng suất làm việc của đội công nhân thứ hai. Khi đó,  $x, y > 0$ . Do hai đội cùng làm chung thì sau 15 ngày là xong nên ta có

$$15(x + y) = 1,$$

hay

$$3x + 3y = \frac{1}{5}. \quad (1)$$

Cũng theo đề bài, nếu đội thứ nhất làm riêng trong 3 ngày rồi dừng lại và đội thứ hai làm tiếp công việc đó trong 5 ngày thì cả hai đội hoàn thành được 25% công việc. Từ đó suy ra

$$3x + 5y = \frac{1}{4}. \quad (2)$$

Lấy (2) - (1), ta được  $2y = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ . Suy ra  $y = \frac{1}{40}$  (số phần công việc/ngày), từ đó ta có  $x = \frac{1}{15} - y = \frac{1}{40} = \frac{1}{24}$  (số phần công việc/ngày). Vậy, nếu làm riêng thì đội công nhân thứ nhất mất 24 ngày để hoàn thành công việc, còn đội công nhân thứ hai mất 40 ngày để hoàn thành công việc.

b) Do bồn nước có dạng hình trụ với chiều cao 1,75 m và diện tích đáy là  $0,32 \text{ m}^2$  nên thể tích của bồn nước là  $1,75 \cdot 0,32 = 0,56 \text{ (m}^3\text{)}$ . Từ đó suy ra bồn nước đã cho có thể đựng đầy được 0,56 mét khối nước.  $\square$

**Bài 3 (2.0 điểm).****a)** Giải phương trình

$$x^4 - 7x^2 - 18 = 0.$$

**b)** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $(d) : y = 2mx - m^2 + 1$  ( $m$  là tham số thực) và parabol  $(P) : y = x^2$ .**i)** Chứng minh rằng  $(d)$  luôn cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt.**ii)** Tìm tất cả các giá trị của số thực  $m$  để  $(d)$  cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{2}{x_1 x_2} + 1$ .**Lời giải.** **a)** Phương trình luôn xác định với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Ta viết lại phương trình dưới dạng

$$x^4 + 2x^2 - 9x^2 - 18 = 0,$$

hay

$$x^2(x^2 + 2) - 9(x^2 + 2) = 0.$$

Một cách tương đương, ta có

$$(x^2 + 2)(x^2 - 9) = 0.$$

Do  $x^2 + 2 > 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  nên ta có  $x^2 = 9$ , hay  $x = \pm 3$ . Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là  $x = 3$  và  $x = -3$ .**b) i)** Xét phương trình hoành độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$ :

$$x^2 = 2mx - m^2 + 1,$$

hay

$$(x - m)^2 = 1.$$

Phương trình này có hai nghiệm phân biệt là  $x = m + 1$  và  $x = m - 1$ . Do đó  $(D)$  luôn cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt.**ii)** Do vai trò của  $x_1$  và  $x_2$  là như nhau nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử  $x_1 = m + 1$  và  $x_2 = m - 1$ . Để thỏa mãn yêu cầu của đề bài, trước hết các phân thức trong đẳng thức  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{2}{x_1 x_2} + 1$  phải có nghĩa, tức ta phải có  $x_1 x_2 \neq 0$ , hay  $m \neq \pm 1$ .Bây giờ, với  $m \neq \pm 1$ , ta có

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{2m}{m^2 - 1}$$

và

$$-\frac{2}{x_1 x_2} + 1 = -\frac{2}{m^2 - 1} + 1 = \frac{m^2 - 3}{m^2 - 1}.$$

Do đó, yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi  $m^2 - 3 = 2m$ , hay  $m^2 - 2m - 3 = 0$ . Tức ta phải có  $(m + 1)(m - 3) = 0$ . Do  $m \neq \pm 1$  nên ta có  $m = 3$ . Vậy có duy nhất một giá trị  $m$  thỏa mãn yêu cầu đề bài là  $m = 3$ .  $\square$

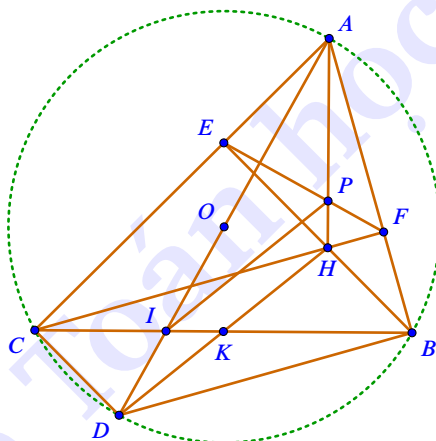
**Bài 4 (3.0 điểm).** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn ( $O$ ). Hai đường cao  $BE$  và  $CF$  của tam giác  $ABC$  cắt nhau tại điểm  $H$  ( $E$  thuộc  $CA$ ,  $F$  thuộc  $AB$ ).

- Chứng minh rằng bốn điểm  $B, C, E, F$  cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh rằng đường thẳng  $OA$  vuông góc với đường thẳng  $EF$ .
- Gọi  $K$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ . Đường thẳng  $AO$  cắt đường thẳng  $BC$  tại điểm  $I$ , đường thẳng  $EF$  cắt đường thẳng  $AH$  tại điểm  $P$ . Chứng minh rằng tam giác  $APE$  đồng dạng với tam giác  $AIB$  và đường thẳng  $KH$  song song với đường thẳng  $IP$ .

**Lời giải.** a) Do  $BE$  là đường cao kẻ từ  $B$  của tam giác  $ABC$  nên  $BE \perp AC$ , suy ra  $\angle BEC = 90^\circ$ . Do đó  $E$  thuộc đường tròn đường kính  $BC$ . (1)

Chứng minh tương tự, ta cũng có  $F$  thuộc đường tròn đường kính  $BC$ . (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra bốn điểm  $B, C, E, F$  cùng thuộc đường tròn đường kính  $BC$ .



b) Do  $OA = OC$  (bán kính của  $(O)$ ) nên tam giác  $AOC$  cân tại  $O$ . Suy ra  $\angle OAC = \angle ACO$ . Mà  $\angle ACO + \angle OAC + \angle AOC = 180^\circ$  và  $\angle AOC = 2\angle ABC$  (tính chất góc nội tiếp) nên

$$\angle OAC = \frac{180^\circ - \angle AOC}{2} = \frac{180^\circ - 2\angle ABC}{2} = 90^\circ - \angle ABC. \quad (3)$$

Mặt khác, theo chứng minh trên, tứ giác  $BCEF$  nội tiếp nên  $\angle CEF + \angle ABC = 180^\circ$ . Lại có  $\angle CEF + \angle AEF = 180^\circ$  nên

$$\angle ABC = \angle AEF. \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta suy ra

$$\angle OAC + \angle AEF = 90^\circ - \angle ABC + \angle ABC = 90^\circ.$$

Do đó  $OA \perp EF$ .

c) Do các đường cao  $BE$  và  $CF$  của tam giác  $ABC$  cắt nhau tại  $H$  nên  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$ . Suy ra  $AH \perp BC$ . Từ đó ta có  $\angle PAE + \angle ACB = 90^\circ$ , hay

$$\angle PAE = 90^\circ - \angle ACB. \quad (5)$$

Theo kết quả câu **b)**, ta có  $OA \perp EF$ . Do đó

$$\angle IAB = 90^\circ - \angle AFE.$$

Mặt khác, chứng minh tương tự như (4), ta cũng có  $\angle AFE = \angle ACB$ . Do đó

$$\angle IAB = 90^\circ - \angle ACB. \quad (6)$$

Kết hợp (5) và (6), ta suy ra

$$\angle PAE = \angle IAB. \quad (7)$$

Hai tam giác  $APE$  và  $AIB$  có  $\angle ABC = \angle AEP$  (theo (4)) và  $\angle PAE = \angle IAB$  nên đồng dạng với nhau (g-g).

Bây giờ, do  $\triangle APE \sim \triangle AIB$  nên

$$\frac{AP}{AI} = \frac{AE}{AB}. \quad (8)$$

Gọi  $D$  là giao điểm thứ hai của  $AO$  và đường tròn  $(O)$ . Khi đó  $AD$  là đường kính của  $(O)$  nên ta có  $\angle DCA = 90^\circ$ , suy ra  $DC \perp AC$ . Mà  $BE \perp AC$  nên ta có  $DC \parallel BE$ .

Chứng minh tương tự, ta cũng có  $BD \parallel CF$ . Do đó, tứ giác  $BDCH$  là hình bình hành. Mà  $K$  là trung điểm của  $BC$  nên ta cũng có  $K$  là trung điểm của  $HD$ . (9)

Hai tam giác  $DBA$  và  $HEA$  có  $\angle DBA = \angle HEA = 90^\circ$  và  $\angle HAE = \angle DAB$  (theo (7)) nên đồng dạng với nhau (g-g). Suy ra

$$\frac{AH}{AD} = \frac{AE}{AB}. \quad (10)$$

Từ (8) và (10), ta suy ra  $\frac{AP}{AI} = \frac{AH}{AD}$ . Áp dụng định lý Thales đảo cho tam giác  $ADH$ , ta có  $IP \parallel DH$ . Kết hợp với (9), ta suy ra  $IP \parallel KH$ . Bài toán được chứng minh xong. □

**Bài 5 (0.5 điểm).** Cho  $a, b$  là các số thực thay đổi thỏa mãn  $a^2 + b^2 + ab = 3$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^4 + b^4 - ab.$$

**Lời giải.** Do  $a^2 + b^2 = 3 - ab$  nên ta có

$$P = a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 - ab = (3 - ab)^2 - 2a^2b^2 - ab = 9 - 7ab - a^2b^2.$$

Suy ra

$$4P = 36 - 28ab - 4a^2b^2 = -(2ab + 7)^2 + 85.$$

Bây giờ, do  $(a + b)^2 \geq 0$  và  $(a - b)^2 \geq 0$  nên ta có

$$3 + ab = a^2 + b^2 + 2ab \geq 0$$

và

$$3(1 - ab) = 3 - 3ab = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0.$$

Suy ra

$$-3 \leq ab \leq 1.$$

Từ đây, ta có  $1 \leq 2ab + 7 \leq 9$ . Suy ra  $1 \leq (2ab + 7)^2 \leq 81$ . Từ đó, ta có

$$84 = -1 + 85 \geq 4P \geq -81 + 85 = 4,$$

hay

$$21 \geq P \geq 1.$$

Bất đẳng thức bên trái xảy ra dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = -b$ ,  $a^2 + ab + b^2 = 3$ , tức  $(a, b) \in \left\{ \left( \sqrt{3}, -\sqrt{3} \right), \left( -\sqrt{3}, \sqrt{3} \right) \right\}$ . Bất đẳng thức bên phải xảy ra dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b$ ,  $a^2 + b^2 + ab = 3$ , tức  $(a, b) \in \{(1, 1), (-1, -1)\}$ . Vậy ta có kết luận  $\max P = 21$  và  $\min P = 1$ .  $\square$